95e année (1984-1985) Septembre 1984 - Mensuel n° 1

Revue de Mathématiques Spéciales

Ce premier numéro de la 95e année de la *Revue de Mathématiques spéciales* propose un choix de sujets donnés en 1984 aux concours d'Agrégation et du CAPES et aux concours d'entrée aux Grandes Écoles.

Cette documentation sera complétée par la parution dans les prochains numéros de questions orales proposées à différents concours d'entrée aux Grandes Écoles.

Les énoncés précédés d'un numéro seront résolus dans le courant de l'année 1984-1985, selon les prévisions de parution qui figurent page 96. Nos lecteurs peuvent nous faire parvenir des solutions de ces problèmes; la Rédaction examinera celles lui parvenant deux mois avant la date de parution prévue.

Agrégation de mathématiques

Mathématiques générales

6383. Dans tout le problème, on désigne par K un corps commutatif *de caractéristique différente de 2.* On appelle *algèbre* (sur K) un K-espace vectoriel A de dimension *finie*, muni d'une application K-bilinéaire de A × A dans A, appelée produit et notée $(x, y) \mapsto xy$. *(Contrairement à certains usages, ce produit ne sera pas nécessairement supposé associatif).*

On appelle sous-algèbre de A tout sous-espace vectoriel E fermé pour le produit (c.-à-d., pour tous x et y de E, xy est dans E). On appelle homomorphisme d'algèbres une application K-linéaire $f : A \to B$ telle que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous x et y de A, et isomorphisme d'algèbres un homomorphisme d'algèbres qui est bijectif.

On dit qu'une algèbre est commutative (respectivement associative, respectivement unitaire) si le produit est une opération commutative (respectivement associative, respectivement admet un élément neutre bilatère, *que l'on supposera toujours différent de 0*).

I

Soit S une partie d'une algèbre A.

1° Montrer qu'il existe une plus petite sous-algèbre de A contenant S. On la notera K[S].

2° Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de K[S] comme espace vectoriel telle que chaque élément de $\mathscr{B}$ est soit un élément de S, soit un produit itéré d'éléments de S.

3° On dit qu'une algèbre A est *alternative* si son produit vérifie

(A) $\quad x(xy) = x^2y$ et $(yx)x = yx^2$ pour tous x et y de A, où $x^2 = xx$.

Soit A une algèbre telle que pour tous x et y de A, la sous-algèbre $K[\{x, y\}]$ (que l'on notera désormais $K[x, y]$) est associative.

Montrer que A est alternative.

4° On appelle *associateur* l'application trilinéaire $a: A \times A \times A \to A$ définie par

$$a(x, y, z) = x(yz) - (xy)z.$$

Montrer que A est alternative si, et seulement si, a est une application trilinéaire alternée.

5° En supposant que la caractéristique de K est différente de 3, montrer que si A est alternative et commutative, elle est associative.

II

Soit A une algèbre *alternative*.

1° Montrer que, pour tous les éléments x, y, z de A, on a les identités suivantes :

a) $(xy)x = x(yx)$ (on notera désormais $xyx = (xy)x$);

b) $x(yz) + (yz)x = (xy)z + y(zx)$;

c) $x(yz)x = (xy)(zx)$ (on pourra utiliser les trois identités obtenues en remplaçant dans ***b)*** successivement y par xy, puis z par zx et enfin x par x^2);

d) $a(x, y, z)x = a(xy, z, x)$ et $xa(y, z, x) = a(x, y, zx)$;

e) $x(y(xz)) = (xyx)z$ et $((zx)y)x = z(xyx)$.

2° Soit S une partie de A et E un sous-espace vectoriel de K[S] contenant S. On suppose que pour tout u de S et tout x de E, les éléments ux et xu sont dans E. Montrer que E coïncide avec K[S]. (On pourra commencer par montrer que si E′ est l'ensemble des éléments x de K[S] tels que, pour tout y de E, xy et yx soient dans E, alors E′ est une sous-algèbre.)

3° On dit qu'une partie S de A est *fortement associative* si, pour tout x de A et tous u et v de S, on a $a(x, u, v) = 0$.

Montrer que si S est fortement associative, alors K[S] est aussi fortement associative. (On pourra commencer par montrer que si u et v sont dans S, alors la réunion de S et de l'élément uv est aussi fortement associative, en utilisant les formules **II.*d*)** convenablement polarisées.)

4° Pour tout x de A, on note $K[x] = K[\{x\}]$. Montrer que $K[x]$ est fortement associative. En déduire que $K[x]$ est une algèbre associative et commutative.

5° Montrer que $K[x, y]$ est une algèbre associative pour tous x et y dans A. (On pourra commencer par montrer que si E est l'ensemble des éléments z de $K[x, y]$ tels que $a(x, y, z) = 0$, alors E coïncide avec $K[x, y]$.)

III

Soit A une algèbre unitaire *(non nécessairement alternative)*. On note 1 son unité. On appelle *conjugaison* sur A une application K-linéaire de A dans lui-même, notée $x \mapsto \bar{x}$, vérifiant :

a) $\bar{\bar{x}} = x$ pour tout x de A;

b) $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ pour tous x et y de A;

et

c) $\bar{x} = x$ si, et seulement si, x est dans la sous-algèbre K1 de A formée de tous les multiples $\lambda 1$ de 1 lorsque λ parcourt les éléments de K.

1° Montrer que pour tout x de A, les éléments $x + \bar{x}$, $x\bar{x}$ et $\bar{x}x$ sont dans K1 et que $x\bar{x} = \bar{x}x$.

2° On note $Q(x)$ l'unique élément de K tel que $x\bar{x} = Q(x)1$, puis $B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$ et enfin $T(x) = B(x, 1)$.

Montrer que Q est une forme quadratique sur A et que, pour tout x de A, on a

$$x + \bar{x} = 2T(x)1 \qquad \text{et} \qquad x^2 - 2T(x)x + Q(x)1 = 0.$$

3° On suppose de plus que A est *alternative*. Montrer que, pour tous x et y de A, on a

$$\bar{x}(xy) = Q(x)y = (yx)\bar{x} \qquad \text{et} \qquad Q(xy) = Q(x)Q(y).$$

4° On suppose toujours A alternative. Montrer qu'un élément x de A admet un inverse bilatère pour le produit si, et seulement si, $Q(x)$ est non nul, et que cet inverse est alors unique.

IV

Soit A une algèbre unitaire *(non nécessairement alternative)* et $x \mapsto \bar{x}$ une conjugaison sur A. Pour tout élément α de K, on note $A(\alpha)$ l'algèbre (sur K) d'espace vectoriel sous-jacent $A \times A$, muni du produit défini par

$$(x, y)(z, t) = (xz + \alpha\bar{t}y,\ tx + y\bar{z})$$

pour x, y, z et t dans A. On munit $A(\alpha)$ de l'unité $(1, 0)$ et de la conjugaison $\overline{(x, y)} = (\bar{x}, -y)$.

1° Montrer que pour tout élément λ *non nul* de K, les algèbres $A(\lambda^2\alpha)$ et $A(\alpha)$ sont isomorphes.

2° Quelles sont les conditions que doit respectivement vérifier A pour que $A(\alpha)$ soit commutative (respectivement associative, respectivement alternative) ?

3° On considère K comme algèbre unitaire sur lui-même pour sa multiplication et son unité 1, et on le munit de la conjugaison triviale $\bar{x} = x$ pour tout x de K. Montrer que, pour tous α, β, γ et δ de K,

a) L'algèbre $K(\alpha)$ est associative et commutative;

b) L'algèbre $K(\alpha, \beta) = K(\alpha)(\beta)$ est associative et n'est pas commutative;

c) L'algèbre $K(\alpha, \beta, \gamma) = K(\alpha, \beta)(\gamma)$ est alternative et n'est pas associative;

d) L'algèbre $K(\alpha, \beta, \gamma)(\delta)$ n'est pas alternative.

4° On prend pour K le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Montrer que $\mathbb{R}(-1)$ et $\mathbb{R}(-1, -1)$ sont respectivement isomorphes au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et au corps $\mathbb{H}$ des quaternions, munis de leur multiplication, de leur unité et de leur conjugaison usuelles.

V

Soit A une algèbre unitaire munie d'une forme quadratique *non nulle* $Q : A \to K$ vérifiant

(C) $$Q(xy) = Q(x)Q(y) \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ de A.}$$

1° On note encore $B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$. Montrer que pour tous x, y, z et t de A, on a

$$2B(x, y)B(z, t) = B(xz, yt) + B(xt, yz).$$

2° Pour tout x de A, on note $\bar{x} = 2B(x, 1)1 - x$. Montrer que l'application $x \mapsto \bar{x}$ de A dans lui-même est K-linéaire et vérifie :

$\bar{x} = x$ si, et seulement si, x est dans $K1$,
$\bar{\bar{x}} = x$ pour tout x de A,
$B(xy, z) = B(y, \bar{x}z) = B(x, z\bar{y})$ pour tous x, y et z de A.

3° On suppose désormais (jusqu'à la fin de V) que Q est *non-dégénérée*.
Montrer que, pour tous x et y de A, on a

$$\bar{x}(xy) = Q(x)y = (yx)\bar{x} \qquad \text{et} \qquad \overline{xy} = \bar{y}\bar{x}.$$

En déduire que $x\bar{x} = \bar{x}x = Q(x)1$ pour tout x de A.
Montrer que A est alternative.

4° Soit C une sous-algèbre de A vérifiant les propriétés suivantes :

a) C contient 1 et est différente de A;

b) $\bar{C} = C$ (c.-à-d., pour tout x de C, $\bar{x}$ est dans C);

et

c) La restriction de Q à C est non-dégénérée.
Montrer qu'il existe un élément α *non nul* de K et un homomorphisme injectif d'algèbres

$$f : C(\alpha) \to A \quad \text{tel que} \quad f(x, 0) = x \quad \text{et} \quad \overline{f(x, y)} = f(\bar{x}, -y) \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ de C.}$$

Vérifier que la restriction de Q à $C(\alpha)$ est encore non-dégénérée.

5° En déduire que l'algèbre A est isomorphe à l'une des algèbres K, $K(\alpha)$, $K(\alpha, \beta)$ ou $K(\alpha, \beta, \gamma)$ avec α, β et γ *non nuls* dans K.

Réciproquement, montrer que, pour ces algèbres, la forme quadratique Q associée par **III.2°** à la conjugaison définie au **IV**, est *non-dégénérée* et vérifie (C).

VI

Soit A une algèbre alternative unitaire.

1° Pour tout polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ de K[X], et tout x de A, on note P(x) l'élément de A défini par

$$P(x) = a_0 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

(où x^i est défini par récurrence par $x^{i+1} = xx^i$). On rappelle qu'un polynôme non nul P de K[X] est dit unitaire si le coefficient de son terme de plus haut degré est l'élément 1 de K.

Montrer que pour tout x de A, il existe un unique polynôme unitaire P_x dans K[X] vérifiant $P_x(x) = 0$ et tel que tout polynôme R de K[X] vérifiant $R(x) = 0$ soit un multiple de P_x dans K[X].

2° Dans le reste du paragraphe **VI**, on suppose que A *n'a pas de diviseur de zéro* (c.-à-d., que l'égalité $xy = 0$ dans A implique $x = 0$ ou $y = 0$).

Montrer que pour tout x de A, le polynôme P_x est irréductible.

3° Montrer que si K est le corps $\mathbb{C}$, alors A est isomorphe à $\mathbb{C}$.

4° On suppose maintenant que K est le corps $\mathbb{R}$. Montrer que tout élément x de A vérifie une équation du deuxième degré :

$$x^2 - 2T(x)x + Q(x)1 = 0,$$

telle que

a) T soit une forme linéaire sur A (on pourra considérer $(x + y)^2$ et $(x - y)^2$);

b) Q soit une forme quadratique définie positive sur A;

c) Pour tous x et y de A, on ait $Q(xy) = Q(x)Q(y)$.

5° En déduire que A est alors isomorphe à l'une des $\mathbb{R}$-algèbres $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{R}(-1, -1, -1)$. Réciproquement, vérifier que la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}(-1, -1, -1)$ est alternative, unitaire, et n'a pas de diviseur de zéro.

VII

Jusqu'à la fin du problème, on note **O** la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}(-1, -1, -1)$, munie de la conjugaison définie au paragraphe **IV**, et des formes Q, B et T correspondantes définies au **III.2°**.

1° Montrer qu'un élément x de **O** satisfait $xy = yx$ pour tout élément y de **O**, si, et seulement si, il est dans $\mathbb{R}1$.

2° Montrer qu'un élément x de **O** satisfait $a(x, y, z) = 0$ pour tous y et z de **O**, si, et seulement si, il est dans $\mathbb{R}1$.

3° On note G le groupe des automorphismes d'algèbre de **O**. Montrer que pour tout f de G, on a $f(1) = 1$, $T(f(x)) = T(x)$ et $Q(f(x)) = Q(x)$ pour tout x de **O**.

4° Pour tout u non nul de **O**, on définit l'application linéaire $A_u : \mathbf{O} \to \mathbf{O}$ par $A_u(x) = u(xu^{-1})$. Montrer que $A_u(1) = 1$, $T(A_u(x)) = T(x)$ et $Q(A_u(x)) = Q(x)$ pour tout x de **O**.

5° Montrer que si $u^2 = -1$, A_u est la symétrie Q-orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de **O** que l'on précisera.

Montrer que si $u^2 = -1$, alors A_u n'est pas dans G.

VIII

On note H l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires bijectives $f : \mathbf{O} \to \mathbf{O}$ telles qu'il existe λ_f et μ_f dans **O** (dépendant de f) avec $Q(\lambda_f) = Q(\mu_f) = 1$, vérifiant

(H) $\qquad f(xy) = (f(x)\lambda_f)(\mu_f f(y)) \qquad$ pour tous x et y de **O**.

1° Montrer que si f et g sont dans H, alors $g \circ f$ vérifie la propriété (H) pour (au moins) un couple (λ, μ) que l'on précisera. (On pourra utiliser **II.1°** ***e***). On ne demande pas, pour l'instant, de montrer que λ et μ obtenus vérifient $Q = 1$.)

2° Montrer que si u de **O** vérifie $Q(u) = 1$, les applications L_u et R_u définies par $L_u(x) = ux$ et $R_u(x) = xu$, sont dans H (on pourra chercher pour λ et μ des puissances de u). En déduire que A_u est dans H et que si f est dans H, alors $L_u \circ f$, $R_u \circ f$ et $A_u \circ f$ sont dans H (on précisera des couples (λ, μ) correspondants).

3° Montrer que pour tout f de H, il existe u et v dans **O** avec $Q(u) = Q(v) = 1$ et g dans G tels que $f = L_u \circ A_v \circ g$.

En déduire que tout f de H vérifie $Q(f(x)) = Q(x)$ pour tout x de **O**. Montrer que H est un groupe pour la composition des applications.

4° On note K le sous-groupe de H formé des applications f qui vérifient $f(1) = 1$. Montrer que K coïncide avec le groupe SO(Q; 1) des applications Q-orthogonales f de **O** dans **O**, de déterminant 1, qui vérifient $f(1) = 1$. (On pourra utiliser **VII.5°** et remarquer que la conjugaison de **O** n'est pas dans K.)

5° Montrer que H coïncide avec le groupe SO(Q) des applications Q-orthogonales de déterminant 1 de **O** dans lui-même.

IX

On conserve jusqu'à la fin du problème les notations de **VII** et **VIII**.

1° Montrer que si un élément f de H vérifie la propriété (H) pour deux couples (λ, μ) et (λ', μ') avec

$$Q(\lambda) = Q(\mu) = Q(\lambda') = Q(\mu') = 1,$$

alors $(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu)$ ou $(\lambda', \mu') = (-\lambda, -\mu)$.

2° Montrer que si $Q(u) = 1$, alors A_u est dans G si, et seulement si, $u^6 = 1$. Vérifier que si u est différent de ± 1, alors $u^6 = 1$ si, et seulement si,

$$Q(u) = 1 \quad \text{et} \quad T(u) = \pm \frac{1}{2}\cdot$$

3° On note S l'ensemble des éléments x de **O** vérifiant $x^2 = -1$. Vérifier que pour tout f de G, on a $f(S) = S$. Montrer que pour tous x et y de S, il existe f dans G tel que $f(x) = y$. (On pourra essayer d'utiliser **IX.2°** avec pour u une combinaison linéaire de $x + y$ et $1 - yx$).

4° On note L le sous-ensemble de H formé des éléments f tels que $\lambda_f = \pm 1$. Vérifier que L est un sous-groupe. Montrer que si x et y dans **O** vérifient $Q(x) = Q(y) = 1$, il existe f dans L tel que $f(x) = y$ (on pourra commencer par chercher à quelle condition $L_u \circ A_v$ est dans L).

Vérifier que G est exactement le sous-groupe des éléments f de L tels que $f(1) = 1$.

X

On note **1** l'identité de **O** et $-\mathbf{1}$ l'application $-\mathbf{1}(x) = -x$. On note H' le groupe quotient de H par son centre $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$, et on note $[f]$ la classe dans H' d'un élément f de H.

On définit les applications σ et τ de H' dans lui-même par

$$\sigma([f]) = [R_{\lambda_f} \circ f] \quad \text{et} \quad \tau([f]) = [L_{\mu_f} \circ f].$$

1° Montrer que σ et τ sont des automorphismes de groupe d'ordre 2 et que $\sigma \circ \tau$ est d'ordre 3. En déduire la structure du groupe d'automorphismes de H' engendré par σ et τ.

2° Vérifier que $-\mathbf{1}$ est dans L mais n'est pas dans K. Caractériser à l'aide de σ et τ les images K' de K et L' de L dans la projection $p : H \to H'$. Montrer qu'il existe un automorphisme de H' qui échange K' et L'. En déduire qu'il existe un homomorphisme surjectif de L sur K dont le noyau est $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$.

3° Montrer que L n'est pas isomorphe au groupe produit de K et du groupe à deux éléments.

Montrer que pour la topologie induite par la topologie usuelle de SO(Q) = H, le groupe L est compact et connexe.

4° Montrer que pour la topologie induite par la topologie usuelle de SO(Q) = H, le groupe G est compact et connexe.